15/11/2018

Για τοπικά και ολικά ακρότατα συναρτ. $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ έχουμε (εκτός από τον ορισμό) τα εξής δύο εργαλεία:

Αναγκαία Συνθήκη: Αν $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\bar{x} \in U$ σημείο τοπικού ακρότατου και ~~υπάρχει~~ $\exists \nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$

Παρατήρηση: Αυτό μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε ανοικτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού και μας δίνει υποψήφια σημεία.

Ικανή συνθήκη: Αν $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: U \to \mathbb{R}$ C^2 και $\bar{x} \in U$ με $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$

Τότε: (α) $Hf(\bar{x})$ θετικά ορισμένος $\Longrightarrow$ η f έχει στο $\bar{x}$ γνήσιο τοπικό ελάχιστο.

(β) $Hf(\bar{x})$ αρνητικά ορισμένος $\Longrightarrow$ η f έχει τοπ. μέγιστο

(γ) $Hf(\bar{x})$ μη ορισμένος (μη οριστικός) (έχει και αρνητικές και θετικές ιδιοτιμές) $\Longrightarrow$ η f δεν έχει ακρότατο έχει σαγματικό σημείο (ορισμός)

(πρότυπα)
Κλασσικά Παραδείγματα

(1) $f_1(x,y) = x^2+y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow \nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Longrightarrow (x,y) = (0,0)$

$\Longrightarrow Hf_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_1 \Longrightarrow$ η f έχει <u>ένα μόνο</u> <u>ακρότατο</u> το οποίο είναι ολικό γνήσιο ελάχιστο.

(2) $f_2(x,y) = -x^2-y^2, \ (x,y)\in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow \nabla f_2(x,y) = (-2x,-2y) = (0,0) \Longrightarrow (x,y) = (0,0)$

$\Longrightarrow Hf_2(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ αρνητικά ορισμένος $\Longrightarrow$

Η f_2 έχει ένα μόνο ακρότατο, το οποίο είναι ολικό γνήσιο μέγιστο.

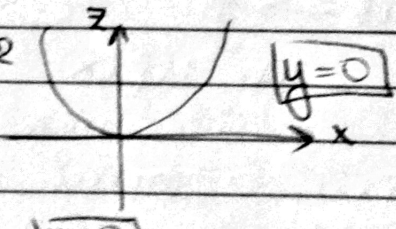
(3) $f_3(x,y) = x^2-y^2, \ (x,y)\in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow$

$\nabla f_3(x,y) = (2x,-2y) = (0,0) \Longrightarrow$ το μόνο σημείο στο οποίο παίζει να έχουμε ακρότατο είναι το $(0,0)$

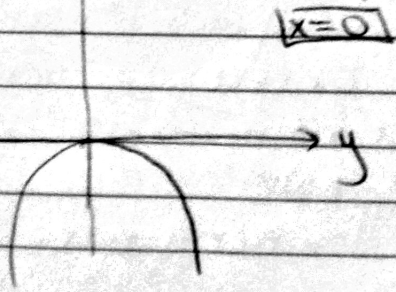
$\Longrightarrow Hf_3(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ μη ορισμένος (έχει και θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές)

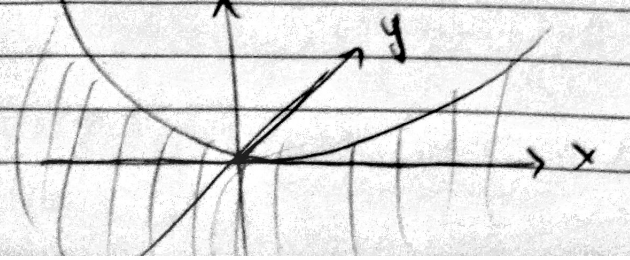
$\Longrightarrow$ στο $(0,0)$ δεν έχει ακρότατο, αλλά σαγματικό σημείο

Τι σημαίνει αυτό; $f(x,0) = x^2$



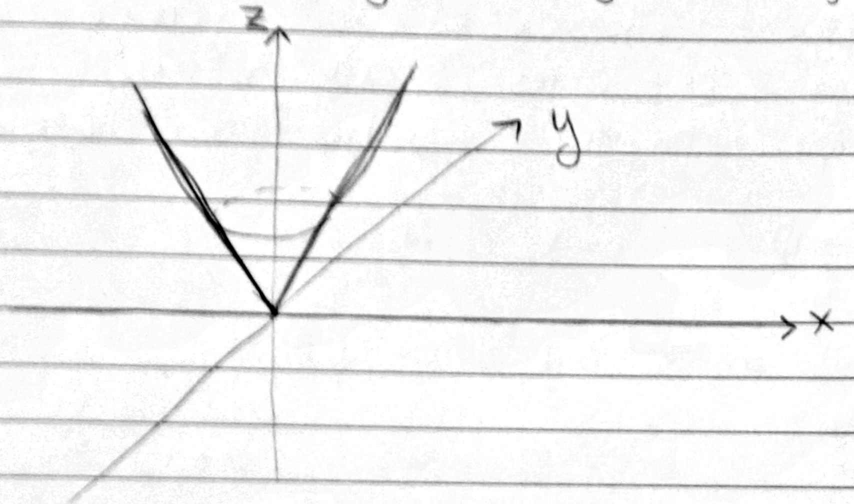
$f_3(0,y) = -y^2$



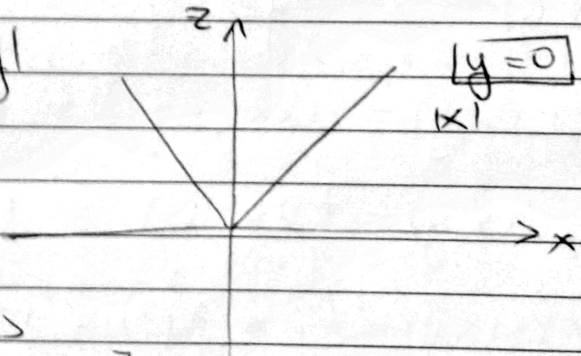


<u>Παρατήρηση</u>: Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες αυτά τα δύο κριτήρια δεν εφαρμόζονται παντού αλλά παρόλαυτα μπορούμε να βρούμε ακρότατο.

π.χ. $f(x,y) = \|(x,y)\|$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$= \sqrt{x^2+y^2}$



$f(x,0) = |x|$, $f(0,y) = |y|$

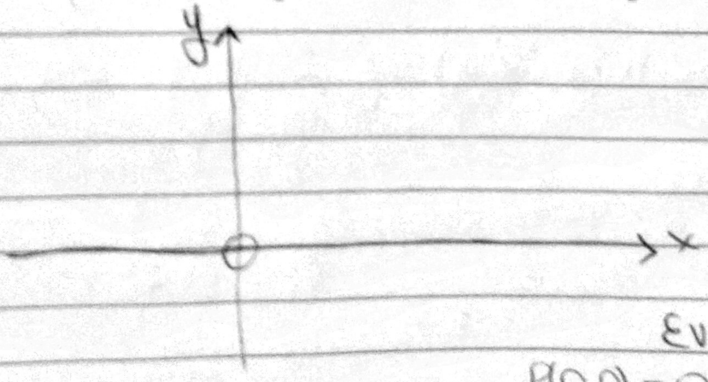


η f δεν έχει μερικές παραγώγους στο $(0,0)$ [γιατί;]

$\Rightarrow$ Η αναγκαία συνθήκη εφαρμόζεται μόνο για $(x,y) \neq (0,0)$, όπου $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) =$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) \overset{!}{=} (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

για $(x,y) \neq (0,0)$



δηλ. $\underline{\underline{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}}$ η $f(x,y) = \|(x,y)\|$ δεν έχει ακρότατο.

Ενώ στο $(0,0)$ έχουμε $f(0,0) = 0$ και $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$f(x,y) = \|(x,y)\| > 0 = f(0,0) \implies$ η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έχει

μοναδικό ακρότατο το γνήσιο ολικό ελάχιστο $f(0,0) = 0$ στο $(0,0)$.

<u>Προσοχή</u>: Πολλές φορές (ιδίως σε θέματα εξετάσεων) ο Εσσιανός πίνακας δεν δίνει αποτέλεσμα. Τότε πρέπει να δούμε με τον ορισμό / παρατήρηση τι γίνεται.

<u>Π.χ.</u> $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 4$

$$f_1(x,y) = x^2 + y^4$$
$$f_2(x,y) = x^2$$
$$f_3(x,y) = x^2 + y^3$$
$$f_4(x,y) = x^2 - y^4$$
$$\implies f^i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\nabla f_1(x,y) = (2x, 4y^3) \overset{!}{=} (0,0) \implies (x,y) = (0,0) \\
\nabla f_2(x,y) = (2x, 0) \overset{!}{=} (0,0) \implies (x,y) = (0,y)_{y \in \mathbb{R}} \\
\nabla f_3(x,y) = (2x, 3y^2) = (0,0) \implies (x,y) = (0,0) \\
\nabla f_4(x,y) = (2x, -4y^3) = (0,0) \implies (x,y) = (0,0)
\end{array}\right\} \implies$$

το μοναδικό <u>υποψήφιο</u> σημείο ακροτάτου είναι το $(0,0)$

$$Hf_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \implies Hf_1(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ημιορισμένο

→ (έχει και ιδιοτιμή 0).

$$Hf_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Hf_3(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \implies$$

$$Hf_3(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Hf_4(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix} \implies$$

$$Hf_4(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

όλοι οι Εσσιανοί στο υποψήφιο σημείο $(0,0)$ έχουν ιδιοτιμή την 0 (ημι-ορισμένοι) $\Longrightarrow$ το ικανό κριτήριο δεν λέει τίποτα

<u>Όμως</u>: (1) $f(0,0)=0$ και $f(x,y)\geq 0 \ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ και

αν $(x,y)\neq(0,0)$ έχουμε $f(x,y)>0$

$\Longrightarrow$ στο $(0,0)$ η f_1 έχει <u>γνήσιο ολικό ελάχιστο</u>.

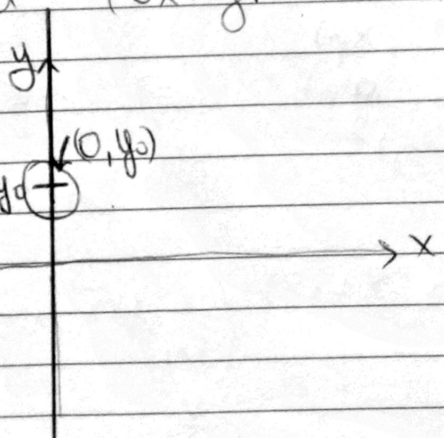
(2) η $f_2(0,y)=0 \quad \forall y\in\mathbb{R}$, $f_2(x,y)\geq 0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

και $\forall (x,y)\neq(0,y_0)$ (όπου $y_0\in\mathbb{R}$ σταθερό) έχουμε

για $x\neq 0$ $\quad f_2(x,y)=x^2>0$ και για $x=0$ και $y=y_0$

$f_2(0,y)=0 \Longrightarrow$ σε κάθε σημείο $(0,y_0)$, $y_0\in\mathbb{R}$, η

f_2 έχει (όχι γνήσιο) ολικό ελάχιστο



(3) $f_3(x,0)=x^2$, $f_3(0,y)=y^3 \Longrightarrow f_3(0,\varepsilon)=\varepsilon^3>0$

$f_3(0,-\varepsilon)=-\varepsilon^3<0$

και $f_3(0,0)=0$

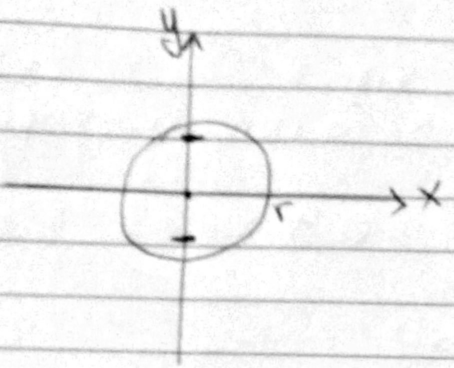
(για $\varepsilon>0$)

$\Longrightarrow$ η f_3 δεν έχει ακρότατο στο $(0,0)$

[π.χ. η f_3 έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0)$, <u>αν</u>

$\forall (x,y)\in B((0,0),r)$ με $r>0$ $\quad f_3(x,y)\geq \underbrace{f_3(0,0)}_{=0}$]

!!!



(4) Η f_4 επίσης δεν έχει ακρότατο στο $(0,0)$ (έχει «γενικευμένο» σαγματικό σημείο).

Άσκηση: Δίνονται $K \in \mathbb{N}$ τυχαία αλλά σταθερά σημεία $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_K \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{K} \|\bar{x} - \bar{a}_i\|^2$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, ελαχιστοποιείται στο σημείο $\bar{\xi} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \bar{x}_i$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(Δηλ. πρέπει να δείξω ότι $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $f(\bar{x}) \geq f(\bar{\xi})$)

Λύση Για $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$
$\bar{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ $(i = 1, \dots, K)$

η $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_{ij})^2$

είναι $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\bar{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\bar{x}) \right)$

$$= \left(\sum_{i=1}^{K} 2(x_1 - a_{i1}), \dots, \sum_{i=1}^{K} 2(x_n - a_{in}) \right)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{K} (x_1 - a_{i1}, \dots, x_n - a_{in})$$

$$= 2 \cdot \sum_{i=1}^{K} (\bar{x} - \bar{a}_i) \overset{!}{=} \bar{0}$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{K} \bar{x} - 2 \cdot \sum_{i=1}^{K} \bar{a}_i = \bar{0}$$ $\Longrightarrow$ Μοναδικό υποψήφιο ακρότατο το σημείο

$$\bar{x} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \bar{a}_i = \bar{\gamma}$$

$$\Longrightarrow H_f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^{k} 2 \end{pmatrix} = \underbrace{2k}_{\in \mathbb{N}\ (\Rightarrow\ >0)} \cdot I$$

άρα είναι θετικά ορισμένος.